**自然科学奖公示**

**项目名称：分形的度量几何和代换动力系统的谱**

**主要完成人：饶辉 杨亚敏 张圆**

**完成单位：华中师范大学、 清华大学、华中农业大学、武汉大学**

**推荐单位：华中师范大学**

**项目简介：**本项目属基础数学。

动力系统是上世纪数学的一个生长点，分形几何是和动力系统密切相关的学科，发展也日新月异。本项目主要研究以下两个问题，其一是分形集，特别是自相似集的结构和度量性质；其二是代换动力系统的几何表示和谱。项目的主要创新成果如下：

1. 在分形集的度量几何方面，我们（代表作1）最早提出有限型的概念，通过“型”把有重叠结构的自相似集转化为无重叠的图递归结构，进而解决其他问题。后来的进展证明，有限型是研究具有重叠结构的分形的非常重要的工具。 利用这个思想，我们在2006年代表作6中解决了著名几何测度论学家G.David 和S. Semmes 在1997年提出的一个公开问题，并引发了关于自相似集的Lipschitz等价的一系列研究。

在强分离自相似集合的Lipschitz等价方面，主要问题是1992年提出的Falconer-Marsh问题。首先，我们把数论中的经典问题Frobenius问题推广到高维， 其次我们通过引入matchable condition, 证明高维Frobenius 问题的方向增长函数是Lipschitz不变量，并由此在共面条件下，解决了Falconer-Marsh问题（代表作7，8，9）。

2. 在代换动力系统的谱理论中的一个重要的问题是Pisot谱猜测。1982年法国数论学家G. Rauzy给出了代换动力系统的一个几何表示，如果能证明Rauzy分形同构于环面，则Pisot谱猜测得证。我们在代表作3-4给出了Rauzy分形同构于环面的两个判定准则：（i）我们构造了一个准周期的自相似多重Tiling，并证明Rauzy分形同构于环面当且仅当此Tiling的重数为1； （ii）我们提出了一个组合条件“超耦合条件”(super-coincidence)，并证明了Rauzy分形同构于环面当且仅当它满足超耦合条件。通过这些工作，谱问题完全转化成tiling问题和组合问题，并使得谱的研究取得了许多新进展。在代表作5中，我们引入Dual IFS, 把Rauzy fractal和著名数学家P. Thurston 引入的beta-tiling统一在统一框架下。

本项目在高水平杂志上发表论文多篇(Adv. Math.(2篇），J.Math.Pures Appl. (3篇），Trans. AMS.(4篇），Nonlinearity(3篇...)。据MathSciNet统计，他的论文共被285位作者引用524次。他在2009年受邀在四年一届的大型国际分形学术会议上作一小时报告（亚洲唯一的一小时报告）。这些工作被SCI论文引用347次，其中210次为完全他引，被国内外数学家广泛认可。

例如香港中文大学刘家成教授在Adv. Math. 2013中称，代表作[4] “ is a path-break work”.A. Siegel(法）和J.Thuswaldner（奥地利）在Memoire Soc. Math. France, 2012中称代表作[3]“This geometrical characterization builds a bridge between number theory and topology”. Harold Park（美国）教授在Math. Review 上评价代表作[7]“They are then able to obtain a striking, complete characterization of Lipschitz equivalence of dust-like self-similar sets with two branches.”2010年出版的剑桥大学及应用百科全书135“Combinatoric, automata and number theory”的第五章中，引用代表作[2]多达10处，其中两处是全文引用定理。

**代表性论文专著目录：**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 序号 | 论文名称/刊名/作者 | 年、卷、页码 |
| 1 | Dual systems of algebraic iterated function systems. [Adv. Math.](http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=3544)  [Rao, Hui](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=606203); [Wen, Zhi-Ying](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=239228); [Yang, Ya-Min](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=774799) | 2014   1. :   63-85 |
| 2 | Atomic surfaces, tilings and coincidence. I. Irreducible case.  [Israel J. Math.](http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=4352)  Ito, Shunji; Rao, Hui | 2006   1. :   129-155 |
| 3 | Purely periodic β-expansions with Pisot unit base.  [Proc. Amer. Math. Soc.](http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=2972)  Ito, Shunji; Rao, Hui | 2005   1. :   953-964 |
| 4 | Lipschitz equivalence of Cantor sets and algebraic properties of contraction ratios.  [Trans. Amer. Math. Soc.](http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=2183)  [Rao, Hui](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=606203); [Ruan, Huo-Jun](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=665062); [Wang, Yang](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=320334) | 2012   1. :1109-1126 |
| 5 | Higher dimensional Frobenius problem: maximal saturated cone, growth function and rigidity.  [J. Math. Pures Appl. (9)](http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=7010)  [Fan, Ai-hua](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=237350); [Rao, Hui](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=606203); [Zhang, Yuan](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=1120942) | 2015(104):533-560 |
| 6 | Higher dimensional Frobenius problem and Lipschitz equivalence of Cantor sets.  [J. Math. Pures Appl. (9)](http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=7010)  [Rao, Hui](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=606203); [Zhang, Yuan](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=1120942) | 2015(104):868-881 |
| 7 | Topological structure of self-similar sets. Fractals,Luo, Jun; Rao, Hui; Tan, Bo | 2002(10):223-227 |
| 8 | On one-dimensional self-similar tilings and pq-tiles. Transcitions of the american mathemical society.Ka-sing Lau ,Hui Rao | 2002(355): 1401-1414 |
| 9 | Relationships between different  dimensions of a measure. Monatsh. math.,Fan, Ai-hua; Lau, Ka-sing; Rao, Hui | 2002(135): 191-201 |
| 10 | Gapsequence, Lipschitz equivalence and box dimension of fractal sets. [Nonlinearity](http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?id=3473)  [Rao, Hui](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=606203); [Ruan, Huo-Jun](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=665062); [Yang, Ya-Min](http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=774799) | 2008(21):1339-1347 |

**主要完成人情况表：**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 姓名 | 排名 | 行政职务 | 技术职称 | 工作单位 | 完成单位 | 对本项目技术创造性贡献 | 曾获科技奖励情况 |
| 饶 辉 | 1 |  | 教授 | 华中师范大学数统学院 | 华中师范大学数统学院 | 项目总负责人，全面负责项目总体方向的确定、研究思路的提出以及研究方案的设计.对本项目所有的重要科学发现做出创造性贡献。 参加了所有的代表性论文，其中第一作者5篇，通讯作者和无通讯作者3篇。 |  |
| 杨亚敏 | 2 |  | 副教授 | 华中农业大学理学院 | 华中农业大学理学院 | 项目主要参与者，对重要科学发现二做出创造性贡献，对重要科学发现一也有贡献。是代表性论文1的通讯作者，是代表性论文10的合作者。 |  |
| 张圆 | 3 |  | 讲师 | 华中科技大学 | 华中师范大学 | 项目主要参与者，对重要科学发现一做出创造性贡献。是代表性论文5，6的通讯作者。 |  |